L'apassionant món de la física del so

Lucía Vañó Hernández
Professora de matemàtiques de secundària

"Potser sigui la música la matemàtica dels sentits, i la matemàtica, la música de la raó".

Pere Puig Adam (1900-1960)

Quines relacions tenen les matemàtiques i la música? Com a llicenciada en Matemàtiques i titulada superior de música en l'especialitat de piano, és una pregunta que sempre m'ha apassionat i m'ha interessat investigar. M'agrada també llançar aquesta pregunta al meu alumnat, i us ben asseguro que em quedo molt sorpresa. Alguns em diuen:""Totes dues són llenguatges universals, tothom els pot estudiar!", o bé "Tant per les matemàtiques com per la música, hi ha una notació particular"... I tenen raó. A mi, però, la relació que em fa estimar ambdues disciplines és que totes dues tenen una bellesa inqüestionable.

Ara bé, com podem observar les seves relacions? Hi ha moltíssims punts de vista: els rítmics, els harmònics, els melòdics, l'afinació... En aquest article espero donar una petita introducció pel que fa a la física del so i al seu tractament matemàtic, basant-me en el TAD (antic treball acadèmicament dirigit), que vaig elaborar l'any 2012 tutoritzada per la Dra. Pilar Bayer Isant durant la llicenciatura de Matemàtiques [1].

Ones sonores

El so és el mitjà de transmissió de la música. Segons el DIEC, "so **m**. Impressió produïda en l'òrgan de l'oïda per les vibracions elàstiques d'un cos que es propaguen en tots els medis materials en forma d'ones".

En ser un moviment ondulatori, la representació més senzilla d'un so s'obté com a suma de corbes sinusoïdals multiplicades per factors d'amplitud.

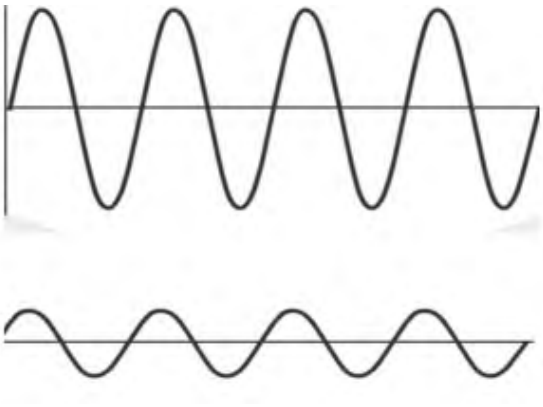
Aquestes corbes es poden caracterizar per les magnituds i unitats de mesura de qualsevol ona de freqüència ben definida. És a dir, les ones elementals (en el nostre cas, sonores) tenen les qualitats físiques bàsiques següents:

- L'amplitud d'ona, que és la quantitat d'energia que conté un senyal sonor.
- La freqüència d'oscil·lació cíclica de l'ona sonora (mesurada en cicles/segon o Hz). La freqüència és inversament proporcional al període (o longitud) de l'ona.
- L'espectre de freqüències, que és el gràfic que ens permet saber on es transmet la major part de l'energia.
- La duració de l'ona sonora.

Matemàticament, representem l'oscil·lació sonora pura per una funció *sinus*. Cal notar que aquestes característiques variaran segons si estudiem un so pur o un so complex (en un so complex hi haurà més variables).

Les ones sonores tenen quatre qualitats perceptives, que depenen de com s'han executat els sons en qüestió:

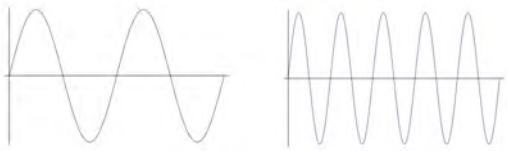
- La intensitat del so, que és la quantitat d'energia (en aquest cas, acústica) que conté el nostre so. Físicament es tradueix com l'amplitud d'ona. Aquesta qualitat ens permet distingir entre un so fort i un so fluix. Es mesura en decibels (dB), que és la dècima part d'un bel.



So fort (dalt) i so fluix (baix)

L'escala d'intensitat acceptada per l'orella humana parteix dels 0 dB i arriba fins als 120-140 dB , on se situa el llindar del dolor. Una activitat amb molta intensitat sonora seria, per exemple, un motor d'avió (120 dB), i una de poca intensitat, una respiració tranquil·la (10 dB).

- L'alçada del so. Físicament parlant, fa referència a la freqüència d'ona. A baixa freqüència d'oscil·lació, tindrem sons greus, i a alta, sons aguts:



So greu (esquerra) i so agut (dreta)

La freqüència es mesura habitualment en Hz. L'orella humana percep entre 20 i 20.000 Hz (pot variar en funció de l'edat). Com a exemple comparatiu amb els animals, el gat percep entre 30 i 50.000 Hz, i el dofí, entre 1.000-130.000 Hz.

- El timbre del so. Aquesta qualitat dona "personalitat" al nostre so, és a dir, és la qualitat que ens permet distingir el so, per exemple, de diferents instruments. Aquesta característica l'estudiarem a la següent secció d'aquest article.
- El temps o duració de l'ona sonora, que és el temps durant el qual es manté un so.

La relació entre les qualitats físiques i les perceptives de les ones sonores es mostra a la taula següent:

Física	**Perceptiva**
Amplitud	Intensitat
Freqüència	Alçada
Espectre	Timbre
Duració	Temps

Ones i instruments

Fins ara hem estudiat característiques bàsiques del so pur. Però què passa quan el so és més complex, per exemple, emès per un instrument?

Per començar, cal definir què és un harmònic. En termes de física, un harmònic és qualsevol de les components sinusoïdals d'una ona periòdica que té una freqüència que és múltiple enter d'una freqüència fonamental. En termes musicals, un harmònic és un so que es produeix de manera natural per la vibració de les ones sonores que acompanyen un so fonamental: cada instrument, en emetre una nota (pretès so pur, que determina el so fonamental), produeix uns harmònics diferents, i això fa que el timbre de cada un el caracteritzi. No és meravellós?

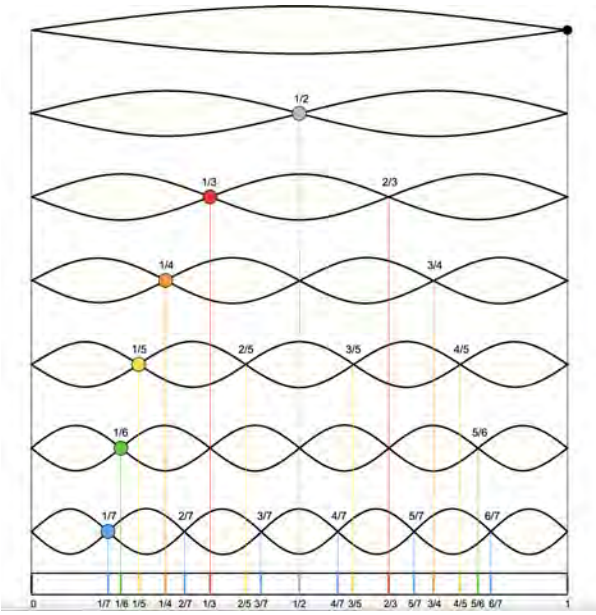


FIGURA: Harmònics d'un so fonamental

Tal com hem dit abans, podem representar el so com a suma de corbes sinusoïdals. *L'anàlisi de Fourier* és l'encarregada d'estudiar aquest fenomen en profunditat. En particular, cada nota emesa per un instrument musical correspon a una suma parcial d'una sèrie de Fourier. Dit en altres paraules, cada nota interpretada per un instrument és la suma d'una sèrie. El primer terme de la sèrie és el so fonamental que determina la nota, i la resta de termes són els seus harmònics afectats de les intensitats corresponents, característiques de cada instrument.

Durant l'elaboració del meu TAD, la Dra. Bayer i jo vam investigar com es representaven aquestes ones en el programari Mathematica 8.0. En aquell moment (2012), ens va semblar molt innovador que una eina informàtica tan matemàticament potent com aquesta tingués

paquets incorporats que permetessin escoltar ni més ni menys que funcions sinusoïdals! Llavors ens vam preguntar: podem fer sonar notes musicals?, podem recrear melodies?, i acords?, podem imitar instruments?

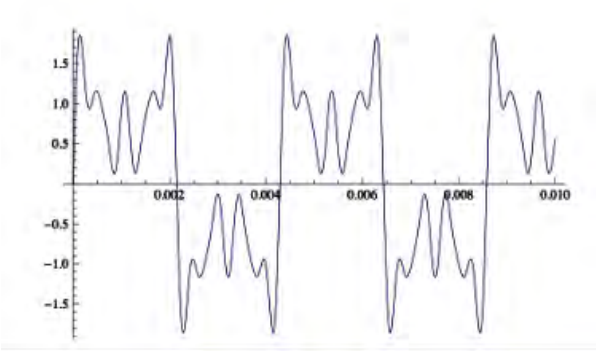
De seguida vam començar a provar-ho, i el resultat va ser molt sorprenent. A partir de la fórmula de l'EDO definida per als moviments harmònics simples i de la representació del so pur com una funció sinus $\sin(f \cdot 2\pi \cdot t)$ (on f és la freqüència de la nota que volem interpretar, i t, la durada del so), vam fer sonar notes i acords amb el nostre programa i, fins i tot, reproduir la melodia del "brindis" de l'òpera *La traviata*, de G. Verdi.

El resultat que potser ens va agradar més va ser quan vam intentar imitar instruments amb el Mathematica; en particular, un clarinet. El clarinet és un instrument de vent-fusta que té unes característiques especials: actua com a ressonador de tub tancat, tot i ser de tub obert, cosa que provoca que només emeti harmònics imparells. Tenint en compte aquesta característica, nosaltres vam "crear" la funció clarinet amb el nostre programa. I el resultat va ser impressionant: el so del nostre clarinet era força similar al d'un clarinet real!

El primer que vam fer va ser definir la nostra "funció clarinet" com a funció de dues variables, f i t, tenint en compte els seus harmònics:

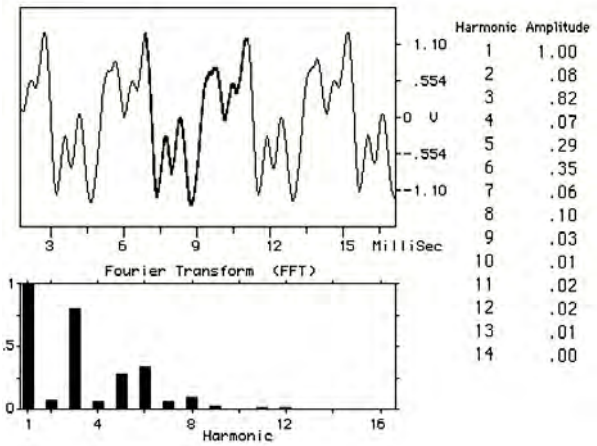
$$\begin{aligned}\text{clarinet}(f,t) := {} & \sin(f2\pi t) + 0.75\sin(3f2\pi t) + \\ & +0.5\sin(5f2\pi t) + 0,14\sin(7f2\pi t) + \\ & +0,5\sin(9f2\pi t) + 0,12\sin(11f2\pi t) + \\ & +0,17\sin(13f2\pi t).\end{aligned}$$

Observem ara el gràfic de l'ona sonora simulant amb el Mathematica que el nostre clarinet interpreta un sib 3 ($f = 233$Hz) en $t = 0.01$ seg (per poder observar bé la nostra ona).



Ona sonora del clarinet (emetent sib 3)

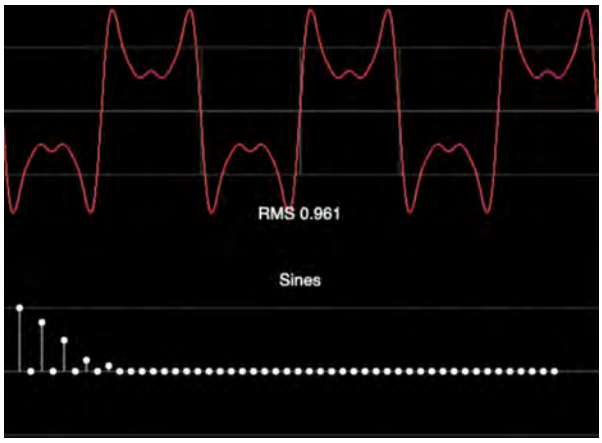
Comparem-ho ara amb un altre gràfic extret de la pàgina web Hyperphysics [3], on observem una ona sonora d'un clarinet amb la mateixa nota que abans (sib 3) i el seu espectre harmònic.



Ona sonora del clarinet (sib 3) i espectre harmònic

Per una banda, s'observa que la gràfica obtinguda amb el Mathematica és semblant a la de la nostra font. Per l'altra, s'observa en l'espectre harmònic la presència dels harmònics imparells (hi ha la presència d'algun parell, com el sisè, però molt disminuïda).

Us recomano experimentar amb la pàgina web [4], on, entre altres coses, podeu recrear sons amb diferents harmònics a partir d'un so pur.



Imitació del so del clarinet amb la font anterior

Sens dubte, el món de la música i les matemàtiques és molt ampli. Us animo a no deixar de llegir i/o investigar sobre el tema, ja que no us deixarà indiferents.

Referències

[1] L. Vañó. *Música i matemàtiques: una introducció al tractament matemàtic del so.* TAD. Directora: P. Bayer (2012) http://hdl.handle.net/2445/175199

[2] P. Bayer. *Música algorítmica: experiments i perspectives.* Jornada *Imaginary, una simfonia matemàtica*, FME, UPC (2021).

[3] R. Nave. *Hyperphysics.* Department of Physics and Astronomy. Georgia State University. http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Music/clarw.html

[4] P. Falstad. *Fourier series applet.* https://www.falstad.com/fourier/index.html

Disseny científic d'instruments

Joaquim Agulló i Batlle
Catedràtic emèrit de la UPC, membre de l'IEC

Els instruments musicals són artefactes que han de permetre a l'instrumentista produir sons musicals i utilitzar-los musicalment.

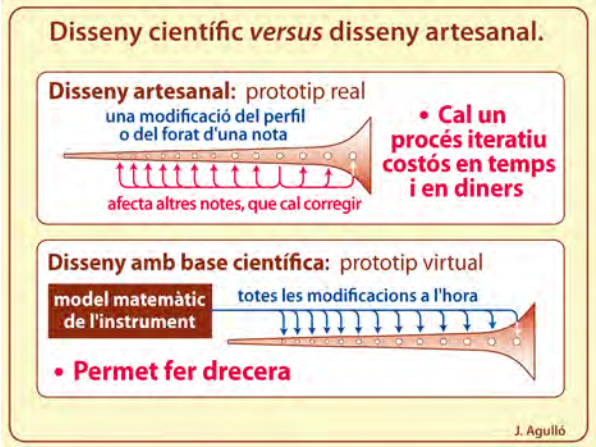
Els sons musicals són vibracions de l'aire caracteritzades, fonamentalment, per tenir un to. I com que un sistema mecànic pot tenir modalitats de vibració caracteritzades per un to –que es trameten a l'aire com a so– i pot ser actuat directament de manera mecànica per l'instrumentista, no és sorprenent que inicialment els instruments musicals fossin mecànics. Així doncs, en aquest cas els sons musicals provenen de la interacció mecànica de l'instrumentista amb l'instrument, per mitjà de pulsacions, percussions, buf, frec... Aquesta interacció és altament favorable a l'expressivitat musical, en comparació amb els instruments electrònics.

Així doncs, el disseny amb base científica es refereix al disseny d'artefactes mecànics que han de verificar un conjunt molt precís de característiques acústiques, i es tracta d'aconseguir-ho tot aplicant la física per mitjà de les matemàtiques, que és el fer de l'enginyeria.

Pel que fa als instruments de l'orquestra, se'n construeixen en una quantitat tan gran que el procés d'evolució i selecció propiciat per l'exigència dels músics i l'habilitat dels constructors els ha portat a un grau de perfeccionament que difícilment l'enginyeria podria fer anar més enllà.

Els instruments tradicionals, en canvi, han evolucionat menys perquè se'n construeixen en poca quantitat, i sovint el grau d'exigència és inferior, encara que aquest no ha estat el cas de les xeremies de la cobla, pel fet de tocar-se amb partitura des del segle XIX.

Disseny científic versus disseny artesanal



- En el disseny artesanal qualsevol retoc local afecta en més o menys mesura totes les notes, que tot seguit cal corregir. Això porta a un procés llarg i costós.
- L'avantatge clau del disseny científic és que permet preveure tots els canvis al mateix temps. Permet fer drecera.

A continuació s'exposen les directrius del disseny científic amb el referent dels dos programes de recerca promoguts per l'Institut d'Estudis Catalans (IEC) a propòsit de les xeremies de la cobla, instruments centrals d'aquest conjunt musical:

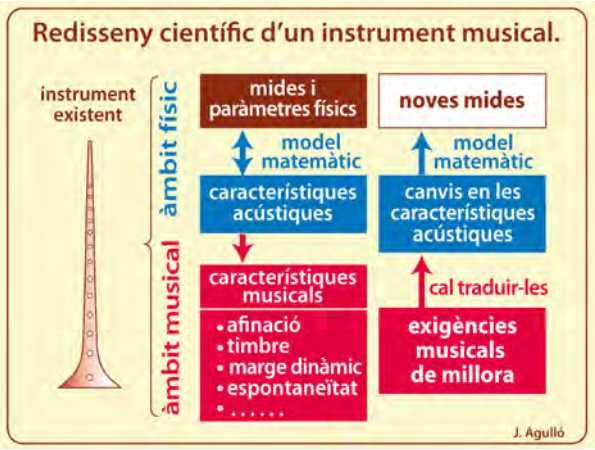
- "Millora del disseny de la tenora"
- "Disseny d'una xeremia barítona com a complement de la tenora i el tible"

Redisseny d'un instrument

El redisseny d'un instrument correspon a un cas d'enginyeria clàssica.

L'eina bàsica és el **model matemàtic** que relaciona les mides i els paràmetres físics amb les característiques acústiques, de les quals deriven les característiques musicals. Per exemple:

- Afinació i timbre
- Marge dinàmic –capacitat de tocar *piano* i *forte*–
- Espontaneïtat –facilitat per iniciar les notes



Es parteix d'unes exigències musicals de millora plantejades pels músics, que cal traduir a canvis en les característiques acústiques i, a partir d'aquestes característiques, d'una sola tacada, el model matemàtic determina les noves mides.

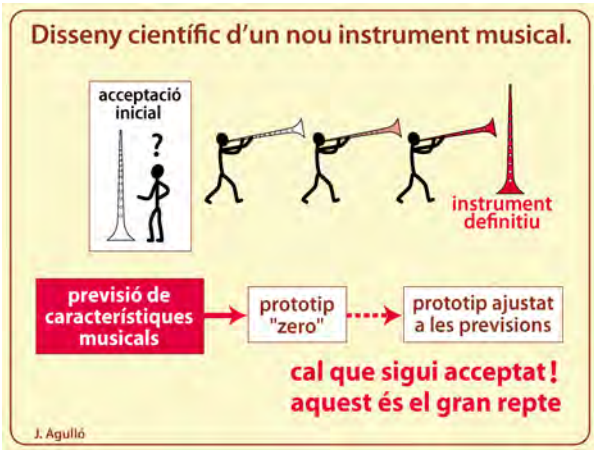
Aquest ha estat el cas de la **tenora**, que va donar resposta al conjunt de millores que músics, instrumentistes i constructors havien concretat amb motiu dels 150 anys de la tenora moderna.

Disseny d'un nou instrument

El mètode de l'enginyeria és encara més decisiu si es tracta de crear un instrument nou condicionat per les seves característiques musicals; es tracta, però, d'una enginyeria més arriscada, perquè cal que el nou instrument sigui acceptat pels músics, i que el facin evolucionar fins a l'instrument definitiu. Aquesta acceptació és particularment crítica si el nou instrument ha de formar part d'una família d'instruments; cal que "parli amb la mateixa veu", per bé que en una tessitura diferent.

A partir de la previsió de les característiques musicals, s'estableix el prototip "zero" i es passa a perfeccionar-lo fins a arribar al prototip ajustat a les previsions. Aleshores cal que aquest prototip sigui acceptat. Aquest és el gran repte!

Aquest ha estat el cas de la **barítona**. Va passar la prova de ser admesa en l'àmbit musical. Es va acceptar que parlava amb la mateixa veu que la tenora i el tible, per bé que en tessitura més greu.



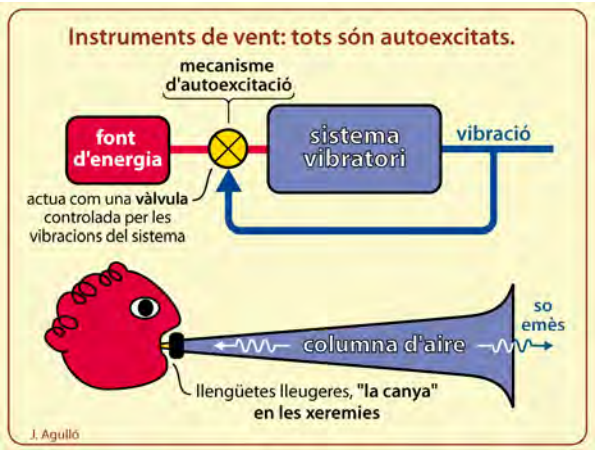
Els instruments de vent, les xeremies

Les xeremies –com és el cas del tible, la tenora i la barítona– són instruments de vent cònics, amb forats laterals per fer les notes i amb embocadura de doble canya. Del seu funcionament sovint se'n dona una descripció trivialitzada segons la qual la canya vibra, a causa del buf de l'instrumentista, i produeix un so amplificat

i tramès a l'exterior pel cos de l'instrument, talment com ho faria un megàfon.

El cos de l'instrument té, però, un paper més important que fer de simple megàfon, perquè té molta incidència en el moviment de la canya; de fet, en controla les vibracions.

Es tracta d'instruments "autoexcitats": es posa a disposició de l'instrument, format fonamentalment per un sistema vibratori, una font d'energia, i és la mateixa vibració d'aquest sistema que en controla l'entrada per mitjà de l'anomenat mecanisme d'autoexcitació, que actua com a vàlvula d'entrada d'energia.



En les xeremies, el buf de l'instrumentista és la font d'energia, la columna d'aire és el sistema vibratori i la doble canya fa de vàlvula d'entrada controlada per les vibracions de la columna d'aire.

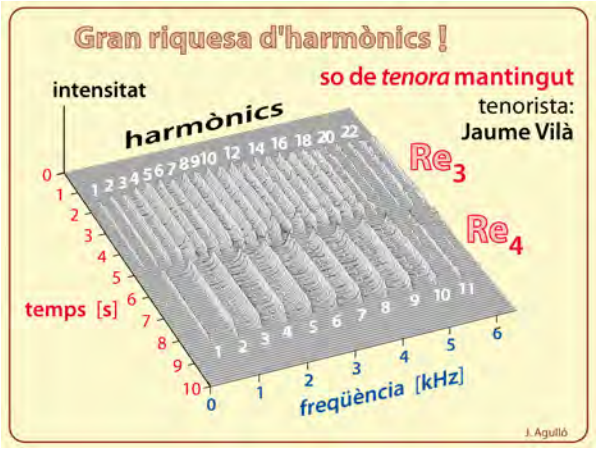
La canya respon als ecos de les fluctuacions de pressió que s'originen dins la canya i es propaguen tub avall; ecos originats per la reflexió parcial del so en trobar obertures a l'exterior –forats lateral oberts o l'extrem obert del pavelló. En reflectir-se les fluctuacions de pressió canvien de signe.

En les xeremies l'arribada de cada reflexió acaba fent tancar la canya violentament, la qual cosa ocasiona una intensa depressió que es propaga tub avall i retorna reflectida com a sobrepressió. Com s'explica que aquesta sobrepressió, que d'entrada el que fa és obrir la canya, acabi fent que es tanqui violentament?

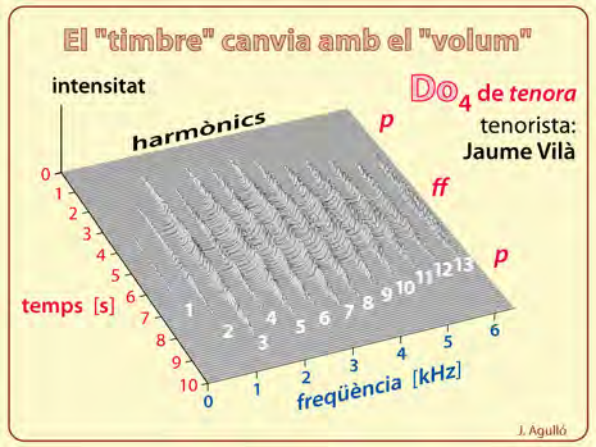
Hi ha un gran aliat per a aquest tancament, que són les depressions en passos estrets: si en una conducció hi ha un pas estret, s'hi estableix una depressió (pressió de Bernoulli). Si la paret és flexible, aquesta depressió tendeix a tancar el pas i a incrementar-se a si mateixa. Hi ha una velocitat crítica per damunt de la qual el tancament arriba a ser total. Arribats a aquest punt, la manca d'entrada d'aire fa desaparèixer la depressió i la paret retorna vers la posició inicial i passa a produir-se un nou cicle.

En els instruments amb canyes, aquestes canyes estableixen un pas estret flexible on s'originen les depressions. El paper que tenen és feble en el clarinet, apreciable en el saxòfon, intens en l'oboè i decisiu en les xeremies de la cobla. Tant és així que aquestes depressions poden fer tancar i obrir del tot la doble canya sense que estigui acoblada a l'instrument. Aquest procés vibratori, de caràcter caòtic, provoca el que s'anomena *rogall*, que és l'assaig que fan servir els instrumentistes per provar l'adequació d'una canya per tocar les notes més greus.

El tancament violent de les dobles canyes de les xeremies fa que el so produït sigui molt ric en harmònics, com ho mostra la figura 5 per als sons *forte* mantinguts del Re3 i el Re4 de tenora.



Aquesta riquesa harmònica, però, no és sempre la mateixa per a una determinada nota, sinó que depèn de la intensitat musical amb què es toqui. A la figura 6 es veu com evoluciona la composició harmònica del Do4 de tenora que comença amb volum *piano*, passa a *fortissimo* i torna a *piano*.

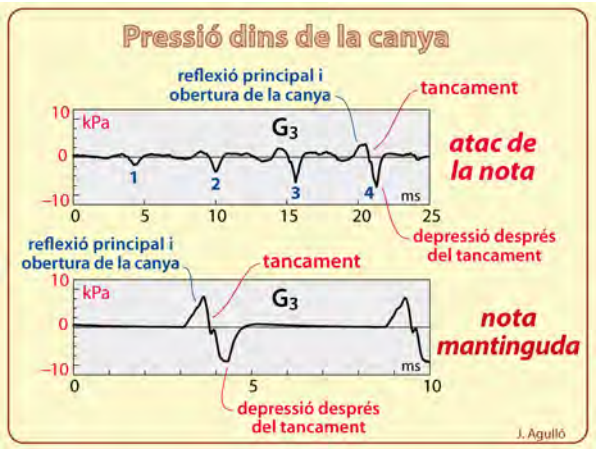


Veiem que el "timbre" de les notes mantingudes no és únic, perquè no ho és la seva composició harmònica, que depèn del volum del so: depèn de si es toca *piano* o *forte*.

Aquest lligam entre "volum" i "timbre" és el que ens permet saber que una tenora toca *forte* encara que la sentim fluix perquè en som lluny.

El transitori d'atac i la nota mantinguda

Les ones reflectides que es propaguen tub amunt actuen com a marcapassos i regularitzen la producció de tancaments de la canya. L'observació de les fluctuacions de pressió dins la canya en el transitori d'atac ho evidencia: la fluctuació inicial ocasionada pel buf de l'instrumentista s'amplifica amb l'arribada de cada eco fins que s'arriba al tancament total.



Una vegada la nota ha passat a ser mantinguda, apareixen clarament l'arribada de la sobrepressió –eco de la depressió enviada tub avall pel cicle anterior–, el tancament brusc de la canya i, finalment, la depressió ocasionada pel tancament complet.

En la forma d'aquestes fluctuacions de pressió hi intervé un nou element associat al comportament vibratori de la columna d'aire. Es tracta de l'efecte acumulatiu, cicle rere cicle, provocat per les ressonàncies.

Requisits d'afinació

Per a determinar la posició i la mida dels forats, cal garantir tant l'afinació de l'atac de les notes com de les notes mantingudes, decidida, respectivament, pels ecos i per les ressonàncies.

Afinació de l'atac: el període de la nota ha de coincidir amb el temps d'anada i tornada associat al forat obert corresponent, més el temps de resposta de la canya fins a tancar del tot després d'arribar l'eco.

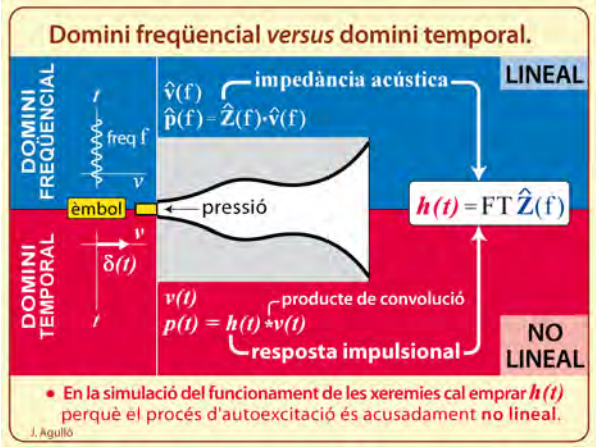
Afinació de les notes mantingudes:

- La freqüència de la primera ressonància per a cada digitació del 1r registre ha de ser adequadament propera a la de la nota.
- La freqüència de la segona ressonància per a cada digitació del 2n registre ha de ser adequadament propera a la de la nota.

La modelització matemàtica

La formulació de la dinàmica dels sistemes oscil·latoris en el domini freqüencial és molt eficient, però requereix que el sisme sigui lineal. I aquest no és el cas de les xeremies per la forta no-linealitat del procés d'autoexcitació.

La dinàmica de la columna d'aire és representada per la impedància acústica en el domini freqüencial i per la resposta impulsional en el domini temporal. Ambdues funcions estan relacionades per la transformada de Fourier.

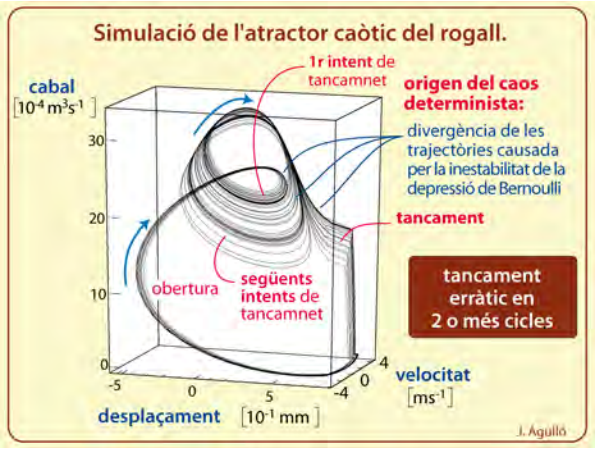


El domini freqüencial és decisiu, però, per al càlcul i l'experimentació de freqüències de ressonància, element cabdal en el disseny dels instruments de vent.

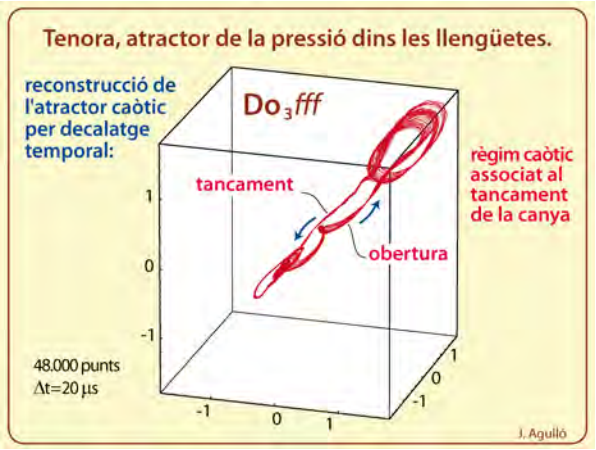
Component caòtic determinista

La doble canya de les xeremies és la porta d'entrada al caos determinista a causa del procés altament inestable del seu tancament, procés limitat per un comportament estable: el de la rigidesa de la doble canya o el del seu impacte de tancament.

La imatge següent mostra una simulació de l'atractor caòtic del rogall. Després de l'obertura de la canya i d'un primer intent de tancament, es produeix un nombre incert d'intents de tancament fins al tancament total.



En la producció d'una nota mantinguda el caos també hi és present, per bé que permet un ritme quasiperiòdic del tancament de la canya, garantit per l'efecte marcapassos de les ones reflectides tub amunt.



La successió de cicles presenta lleugeres discrepàncies imprevisibles, com ho mostra la imatge anterior, obtinguda per decalatge temporal de la pressió captada dins la canya en la producció d'un Do3 fff de tenora.

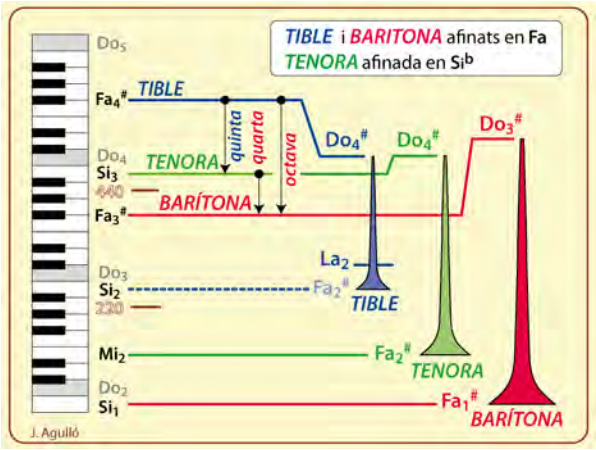
Aquesta fluctuació caòtica té incidència en el so emès i el fa més atractiu musicalment.

Cal tenir en compte que l'orella no detecta el to d'una nota per mitjà de l'anàlisi harmònica, sinó per detecció del ritme de repetició –encara que no sigui del tot rigorós– de la fluctuació de pressió, i que està molt atenta al seu possible canvi. La fluctuació caòtica de la forma d'ona estimula aquesta atenció.

Si es tractés d'un so estrictament periòdic, tindria més semblança amb el soroll d'un motor.

Apèndix. Tible, tenora i barítona

Aquestes són les xeremies de la cobla. La tenora es troba una quinta per sota del tible, i la barítona, que és l'octava baixa del tible, es troba una quarta per sota de la tenora.



Xeremies de la cobla

Són instruments transpositors –d'aquesta manera, tots tenen la mateixa digitació– i a la figura es mostra la seva correspondència amb les notes del piano.

Referència:

Agulló. J. *Física i enginyeria en el disseny d'instruments musicals.* Memòries de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, 3a època, núm. 1035, vol LXV, núm. 8 (2014) https://www.racab.cat/publicacions/memories/1035